

## בחינת טרימסטר ב' במתמטיקה - מועד ב'

- א. משך הבחינה שעתיים. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של הבחינה.  
יש לרשום מהי כיתת האם על המחברת.  
ב. יש לפתור את כל השאלות.  
ג. מותר להשתמש בדפי הנוסחאות המצורפים בלבד.  
ד. בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן.  
ה. כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה.  
ו. כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה.

## שאלה 1 (33%)

16% א. נתונה סדרה גיאומטרית אינסופית  $a_1 = m^2 + 2, a_2 = (m^2 + 2)(m - 3), a_3 = (m^2 + 2)(m - 3)^2 \dots$

(1) עבור אילו ערכים של  $m$  הטור  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (m^2 + 2)(m - 3)^k$  מתכנס.

(2) האם קיים ערך של  $m$  שעבורו סכום הטור שווה 5.5?

2% ב.1. הוכח את הזהויות הטריגונומטריות הבאות:  $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

15% ב.2. פתור את המשוואה:  $(\sin x - \cos x)^2 + \operatorname{tg} x = 2 \sin^2 x$

## שאלה 2 (33%)

17% א. צייר רשומת (סקיצה) של גרף הפונקציה  $f(x) = (x - 2)e^{-|x|}$ . על הגרף סמן נקודות קיצון, נקודות פיתול,

נקודות חיתוך עם הצירים. האם לגרף יש אסימפטוטות?

16% ב. חשב: .I  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 4 \sin 2x}{1 + \cos 2x} dx$  .II  $\int_{-1}^0 \frac{1 - 8x^3}{2x - 1} dx$

## שאלה 3 (34%)

- 8% א. הוכח את משפט הסינוסים (במקרה של משולש חד-זווית).  
12% ב. במשולש שווה שוקיים  $ABC$  ( $AB = AC$ ) זווית הבסיס היא  $2\alpha$  ומרכז המעגל החסום נמצא במרחק  $a$  מקודקוד  $A$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $a$  את שוק המשולש ורדיוס המעגל החוסם את המשולש.  
14% ג.  $a_k$  הוא איבר כללי של הסדרה החשבונית  $1, 4, 7, \dots$ . הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי עבור כל  $n \in \mathbb{N}$  המספר  $1 + 3^{a_n} + 3^{2a_n}$  מתחלק ב-13 ללא שארית.

בהצלחה!

5  
2

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x - \sin^2 x$$

1

$$= \underline{\underline{\cos 2x}}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

2

$$(\sin x - \cos x)^2 + \operatorname{tg} x = 2 \sin^2 x \quad \cos x \neq 0$$

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x + \operatorname{tg} x = 2 \sin^2 x$$

$$1 - 2 \sin^2 x - \sin 2x + \operatorname{tg} x = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x + \operatorname{tg} x = 0$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x = 0 \quad \operatorname{tg} x = t$$

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} - \frac{2t}{1 + t^2} + t = 0$$

$$1 - t^2 - 2t + t + t^3 = 0$$

$$1 - t - t^2 + t^3 = 0$$

$$(1 - t) - t^2(1 - t) = 0$$

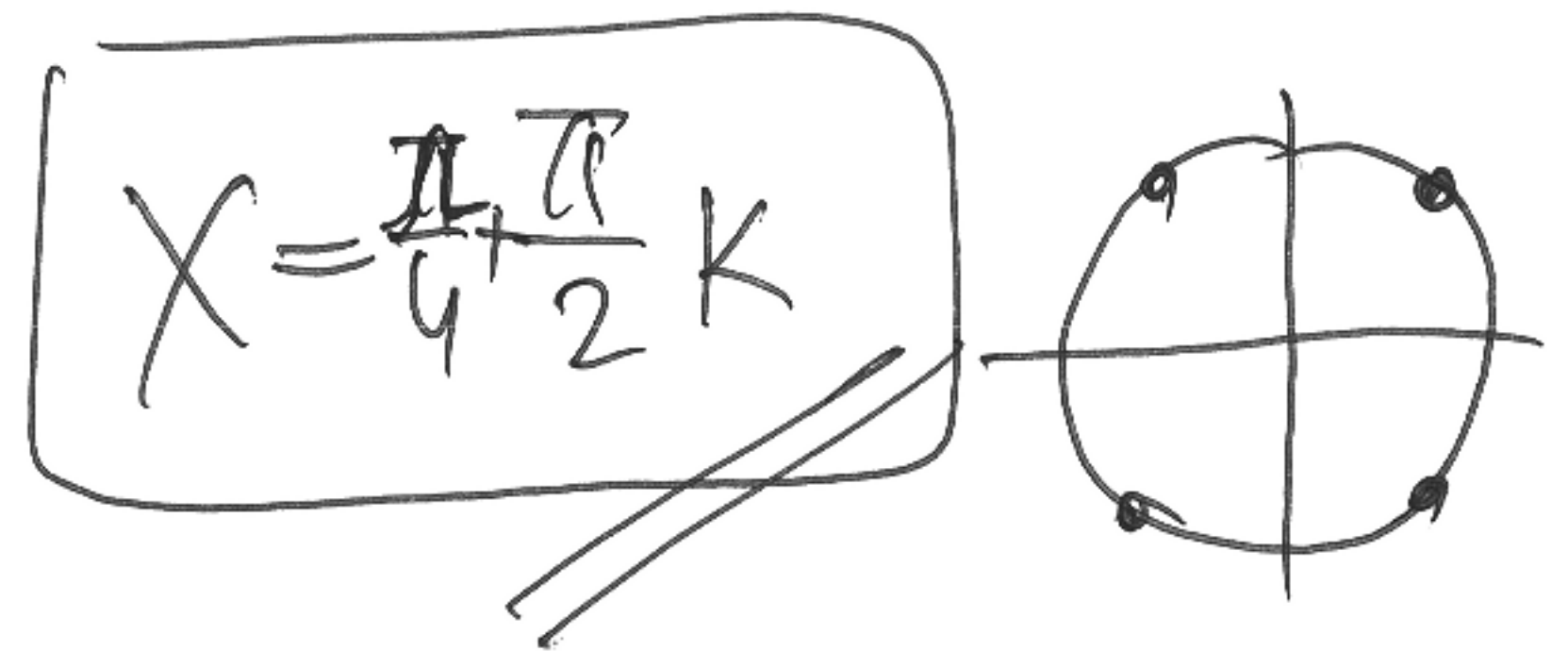
$$(1 - t)(1 - t^2) = 0$$

$$t = 1$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$t = -1$$

$$\operatorname{tg} x = -1$$



የ 1 ስርዓት ስርዓት ስርዓት ስርዓት

1

$$a_1 = m^2 + 2$$

2

$$a_2 = (m^2 + 2)(m - 3)$$

3

$$a_3 = (m^2 + 2)(m - 3)^2$$

$$q = m - 3$$

$$-1 < q < 1$$

$$-1 < m - 3 < 1$$

$$2 < m < 4$$

2

$$\frac{m^2 + 2}{1 - (m - 3)} = 5.5$$

$$m^2 + 2 = 5.5(4 - m)$$

$$m^2 + 2 = 22 - 5.5m$$

$$m^2 + 5.5m - 20 = 0$$

$$m = \frac{5}{2}$$

✓

$$m = -8$$

የሌላ ስርዓት

②  
①

$$y = (x-2) \cdot e^{-|x|}$$

$$x > 0 \Rightarrow y = (x-2) \cdot e^{-x}$$

$$x \leq 0 \Rightarrow y = -(x-2) \cdot e^x$$

$$y = (x-2) \cdot e^{-x} \quad (2, 0)$$

$$(0, -2)$$

$x > 0$

$$y' = 1 \cdot e^{-x} - e^{-x}(x-2) = e^{-x}(-x+3)$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \hline 3 \\ \searrow \end{array}$$

$$(3, e^{-3})$$

$$y'' = -e^{-x}(-x+3) - 1 \cdot e^{-x} = e^{-x}(x-3-1)$$

$$\begin{array}{c} \ominus \quad \oplus \\ \hline 4 \end{array}$$

MAX

$$(4, 2e^{-4})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad / \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$$